



الامتحان السداسي الأول في الجبر

2022/01/20

سنة أولى أ.ت.ث

المدة: ساعة و نصف

قسم: تكنولوجيا

التمرين الأول (08 نقاط) (Micro):

- (1) لتكن p, q قضيتان. باستعمال جدول الحقيقة، برهن أن:
$$(p \vee q) \iff [(p \implies q) \implies q]$$
- (2) لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين و ليكن f تطبيقاً بحيث: $f: A \longrightarrow B$.
نفرض أن: X_1, X_2 جزءان من المجموعة A . برهن بالبرهان المباشر صحة الاستلزام التالي:
$$X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2).$$
- (3) برهن بالخلف أن:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \implies a = b.$$
- (4) برهن بالتراجع أن: جداء كل عددين طبيعيين متتاليين هو عدد طبيعي زوجي.

التمرين الثاني (07 نقاط):

- (1) عرف الفرق التناظري.
- (2) لتكن A, B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E .
(أ) برهن أن:
$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

و
$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$$

(ب) أستنتج أن:
$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$
- (3) لتكن $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ أجزاء من المجموعة E . برهن أن:
$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

التمرين الثالث (05 نقاط):

ليكن التطبيق f المعرفة كيلي:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = |x|.$$

(1) هل f متباين؟، غامر؟ متقابل؟ مع التعليل.

(2) بين أن: $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

(3) لتكن $A = [-2, 0]$ ، $B = [0, 1]$ ، أحسب $f(A)$ ثم $f^{-1}(B)$.

بالتوفيق

تصحيح الامتحان السادس
الأول في مقياس الجبر

حل الميزن الأول (08)

(1) $(p \vee q) \iff [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$

(2)

P	q	$P \vee q$	$P \Rightarrow q$	$(P \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(P \vee q) \iff [(P \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

بذلك $(p \vee q) \iff [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$

(2) $X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$ ؟

نفرض أن $X_1 \subset X_2$ ، نريد أن نثبت $f(X_1) \subset f(X_2)$:

$y \in f(X_1) \implies (y = f(u) : u \in X_1)$ (2)

$\implies (y = f(u) : u \in X_2) \quad (X_1 \subset X_2 \text{ حسب الفرض})$

$\implies y \in f(X_2)$

$f(X_1) \subset f(X_2) : \text{لذلك}$

$X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$: ذلك

(3) $\forall a, b \in \mathbb{K}^+ : \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \implies a = b$ ؟

لنرسم بالمثل ، نفرض أن $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1}$ ، نريد أن نثبت $a = b$:

$\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \implies a(b+1) = b(a+1)$ (2)

$\implies a/b + a = b/a + b$

$\implies a = b$ (بما أننا نعلم أن $a, b \in \mathbb{K}^+$)

$\forall a, b \in \mathbb{K}^+ : \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \implies a = b$: ذلك

(4) نبرهن بالتراجع أن عدداً كل عددين طبيعيين متتاليين هو عدد طبيعي زوجي

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : n(n+1) = 2k \quad \text{أي}$$

$$\bullet \text{ من أجل } n=0 : 0(0+1) = 2 \cdot 0 \quad / \quad \exists k=0 \in \mathbb{N}$$

$P(0)$ صحيحة

$$1(1+1) = 2 \cdot 1 \quad / \quad \exists k=1 \in \mathbb{N}$$

$P(1)$ صحيحة

$\bullet$ من أجل $n=1$

نفرض أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل n ونبرهن أن صحة القضية $P(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $(n+1)(n+2) = 2k' \quad / \quad \exists k' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) &= n(n+1) + 2(n+1) \\ &= 2k + 2(n+1) \quad (\text{حسب الفرض}) \\ &= 2(k+n+1) \\ &= 2k' \quad / \quad \exists k' = k+n+1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

وبالتالي : $P(n+1)$ صحيحة

إذن : عدداً كل عددين طبيعيين متتاليين هو عدد طبيعي زوجي

حل التمرين الثاني : (20 علامة)

(1) الفرق التناظري للمجموعتين الجزئيتين A و B من E هو المجموعة :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \stackrel{?}{=} A \cap B \cap \bar{C} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \bar{C}) \quad (\text{حسب قانون مورغان}) \\ &= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \quad (\text{لأن التقاطع توزيعي على الاتحاد}) \\ &= (\underbrace{A \cap \bar{A}}_{\emptyset} \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \quad (\text{التقاطع تبديلي}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \\ &= A \cap B \cap \bar{C} \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \bar{C} \quad \text{إذن :}$$

$$(A \cap C) \cap (A \cap B) \stackrel{?}{=} A \cap C \cap \bar{B} \quad *$$

١.٥

- طريقة ①: نفرض طريقة السؤال السابقة

- طريقة ②: نستبدل B بـ C والعكس في السؤال السابقة

$$\begin{aligned} (A \cap B) \Delta (A \cap C) &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \quad (1) \\ &= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}) \cup ((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}) \\ &= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \quad (\text{نطبق السؤال 2}) \\ &= A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})) \\ &= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \\ &= A \cap (B \Delta C) \end{aligned}$$

١.٥

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C) \quad \text{بذلك:}$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i) \quad ? \quad (3)$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n) \quad (\text{الخاصة توزيعية على التقاطع}) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i) \end{aligned}$$

١.٥

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i) \quad \text{بذلك:}$$

حل التمرين الثالث (5 نقاط)

$$f(x) = |x| \quad \text{١) لدينا:}$$

$$f(1) = f(-1) = 1 \quad \text{لكن } 1 \neq -1 \quad *$$

وبالتالي: f ليس متباين.

$$* \text{ من أجل } y = -1, \text{ فإن:}$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \text{ أي: } -1 = |x|$$

أو نقول أن العدد -1 ليس له مسابقة في مجموعة الأعداد $\mathbb{R}$ بالتبعية f .

وبالتالي: f ليس عامر.

$$\text{وبما أننا نستنتج أن: } f \text{ ليس متباين}$$

بذلك: (2)

$$f(\mathbb{R}) = \{f(u) / u \in \mathbb{R}\} = \{|u| / u \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty[\quad (2)$$

$$f(K) = \{f(u) / u \in [-2, 0]\} = f([-2, 0]) \quad (3)$$

$$(1) = [f(0), f(-2)]$$

کوت f منطبقه $(\bar{f}, \bar{f})$ با $(\bar{f}, \bar{f})$ کمال $[-2, 0]$ ، طاب

$$f(K) = [0, 2]$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{u \in \mathbb{R} / f(u) \in B\} \\ &= \{u \in \mathbb{R} / f(u) \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

$$f(u) \in [0, 1] \Leftrightarrow |u| \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq |u| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq u \leq +1$$

$$(1) \quad f^{-1}(B) = [-1, 1] \quad \text{ذات}$$

ملاحظه: ممکن است این روش در برخی موارد مطلوب نباشد.
 اتباع طرقات مسا الحل در حالت صریح
 یا به علامه کامل

$$f(\mathbb{R}) = \{f(u) / u \in \mathbb{R}\} = \{|u| / u \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty[\quad (2)$$

$$f(K) = \{f(u) / u \in [-2, 0]\} = f([-2, 0]) \quad (3)$$

$$① = [f(0), f(-2)]$$

کوت f متناقصه (تصاعدي) کما $[-2, 0]$ ، طاب

$$f(K) = [0, 2]$$

$$f^{-1}(B) = \{u \in \mathbb{R} / f(u) \in B\}$$

$$= \{u \in \mathbb{R} / f(u) \in [0, 1]\}$$

$$f(u) \in [0, 1] \Leftrightarrow |u| \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq |u| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq u \leq +1$$

$$① \quad f^{-1}(B) = [-1, 1] \quad \text{ذات}$$

ملاحظة: ممكن ايجاد طرق حل اخرى عند الطالب يجب
اتباع خطوات هذا الحل، وزيادت صحة
ياخذ العلامة كاملة